15/2/16

Θέματα Εξετάσεων

$A \in R^{8\times 8}$

$\det A = -3$

$\det(-2A^4) = (-2)^8 \cdot \det A^4 = (-2)^8 (-3)^4$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{18} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{81} & & a_{88} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{18} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{81} & & \lambda a_{88} \end{pmatrix}$$

$T: R_2[x] \to R_2[x]$

$T(ax^2+bx+\gamma) = (a+b+3\gamma)x^2 + (2a+2b)x + (a+b-4\gamma)$

$\ker T = \{ax^2+bx+\gamma \mid T(ax^2+bx+\gamma)=0\}$

$= \{ax^2+bx+\gamma \mid (a+b+3\gamma)x^2 + (2a+2b)x + (a+b-4\gamma)=0\}$

$= \{ax^2+bx+\gamma \mid \begin{matrix} a+b+3\gamma=0 \\ 2a+2b=0 \\ 2a+b-4\gamma=0 \end{matrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

άρα $\{-bx^2+bx \mid b\in R\} = \langle(-x^2+x)\rangle$

$-x^2+x \neq 0$ Γ.Α, άρα $-x^2+x$ βάση του πυρήνα

$ImT = \{T(ax^2+bx+\gamma) \mid ax^2+bx+\gamma \in R_2[x]\}$

$= \{(a+b+3\gamma)x^2+(2a+2b)x+(a+b-4\gamma) \mid a,b,\gamma \in R\}$

$= \{a(x^2+2x+1)+b(x^2+2x+1)+\gamma(3x^2-4) \mid a,b,\gamma \in R\}$

$= \langle (x^2+2x+1), (x^2+2x+1), (3x^2-4) \rangle$

$= \langle (x^2+2x+1), (3x^2-4) \rangle$

$\underset{3}{\dim R_2[x]} = \underset{2}{\dim ImT} + \underset{1}{\dim KerT}$

Τα δύο διανύσματα $x^2+2x+1, 3x^2-4$ παράγουν έναν χώρο διάστασης 2. Άρα αποτελούν βάση του ImT.

$ax^2+bx+\gamma \in KerT \cap ImT$

$ax^2+bx+\gamma \in KerT = \langle -x^2+x \rangle$

$ax^2+bx+\gamma \in ImT = \langle x^2+2x+1, 3x^2-4 \rangle$

$ax^2+bx+\gamma = \lambda(-x^2+x) = -\lambda x^2+\lambda x$

$ax^2+bx+\gamma = k(x^2+2x+1)+\mu(3x^2-4)$

$-\lambda x^2+\lambda x = k(x^2+2x+1)+\mu(3x^2-4)$

$\lambda x^2+\lambda x = (k+3\mu)x^2+2kx+k-4\mu$

$\left.\begin{array}{l} -\lambda = k+3\mu \\ \lambda = 2k \\ 0 = k-4\mu \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \lambda+3\mu+k=0 \\ \lambda-2k=0 \\ k-4\mu=0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 8\mu+4\mu+3\mu=0 \Rightarrow \\ \lambda=2k=8\mu \\ k=4\mu \end{array}$

$\Rightarrow 15\mu=0 \Rightarrow \mu=0, \lambda=0, k=0$

Άρα $a=0, b=0, \gamma=0$ $KerT \cap ImT = \{0\}$

$$[T]_e^e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$
$e=(x^2,x,1)$

$T(x^2)=x^2+2x+1$
$T(x)=x^2+2x+1$
$T(1)=3x^2+0x-4$

$x_1+x_2+x_3=0$
$2x_1 \quad +x_3=0$
$x_1+bx_2+2x_3=\alpha$
$x_1+3x_2+2x_3=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & b & 2 & \alpha \\ 1 & 3 & 2 & \alpha \end{array}\right) \xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-2r_1,\ r_3-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & b-1 & 1 & \alpha \\ 0 & 2 & 1 & \alpha \end{array}\right) r_4 \to r_4+r_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & b-1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{r_2}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & b-1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-(b-1)r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{(b-1)}{2} & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3-b}{2} & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{array}\right)$$

i) $a\neq 0$ τότε rank(A) ≠ rank(A|B) άρα δεν έχει λύση

ii) $a=0$ rank(A) = rank(A|B) = 3 άρα $b\neq 3$, μοναδική λύση η μηδενική δηλαδή
$x_1=x_2=x_3=0$

iii) $\alpha=0, b=3$ rank(A) = rank(A|b) = 2 άπειρες λύσεις

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_2+\frac{1}{2}x_3=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_3=t \\ x_2=-\frac{1}{2}t \\ x_1=-\frac{1}{2}t \end{array}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$\lambda_1 A+\lambda_2 B+\lambda_3\cdot C+\lambda_4\cdot D=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4 & \lambda_2+\lambda_3\\ \lambda_3-\lambda_4 & \lambda_1+\lambda_3-\lambda_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4=0$

$\lambda_2+\lambda_3=0$

$\lambda_3-\lambda_4=0$ ... $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$

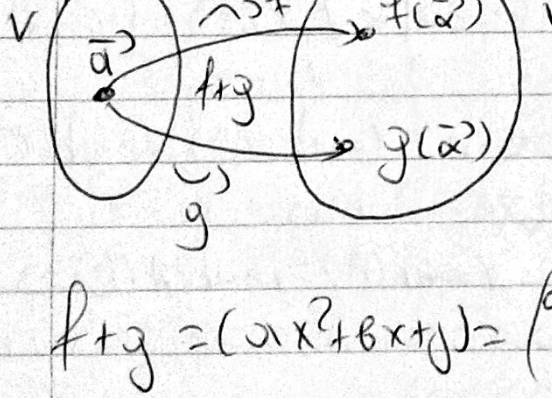
$\lambda_1+\lambda_3-\lambda_4=0$

4 διανύσματα σε χώρο διάστασης 4, παράγουν χώρο.

Πρόταση

Έστω V, W δύο K-διαν. χώροι

Αν $f,g: V\to W$ είναι δύο γραμμικές απεικονίσεις, τότε η απεικόνιση $f+g: V\to W$ που ορίζεται: $(f+g)(\vec{\alpha})=f(\vec{\alpha})+g(\vec{\alpha})\ \forall\ \vec{\alpha}\in V$ είναι γραμμική απεικόνιση και λέγεται άθροισμα των f και g



$\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^{2\times 2}$

$f(\alpha x^2+\beta x+\gamma)=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\alpha+2\beta & \alpha-\beta+\gamma\\ 0 & 2\gamma\end{pmatrix}$

$g(\alpha x^2+\beta x+\gamma)$

$$f+g=(\alpha x^2+\beta x+\gamma)=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha+2\beta & \alpha-\beta+\gamma\\ 0 & 2\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\alpha+2\beta & \alpha+\gamma\\ \gamma & 2\gamma\end{pmatrix}$$

Απόδειξη

Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$

$(f+g)(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = f(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) + g(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = f(\vec{\alpha})+f(\vec{\beta})+g(\vec{\alpha})+g(\vec{\beta})$
$= (f(\vec{\alpha})+g(\vec{\alpha})) + (f(\vec{\beta})+g(\vec{\beta})) = (f+g)(\vec{\alpha})+(f+g)(\vec{\beta})$

$\vec{\alpha} \in V$ $\lambda \in K$

$(f+g)(\lambda\vec{\alpha}) = f(\lambda\vec{\alpha}) + g(\lambda\vec{\alpha}) = \lambda f(\vec{\alpha}) + \lambda g(\vec{\alpha}) =$
$\lambda(f(\vec{\alpha})+g(\vec{\alpha})) = \lambda\cdot(f+g)(\vec{\alpha})$

Άρα η $f+g$ είναι γραμμική.

Έστω V, W K-διαν. χώροι. Αν $f: V \to W$ είναι γραμμική απεικόνιση και $\lambda \in K$ τότε η απεικόνιση $\lambda f: V \to W$ που ορίζεται: $(\lambda f)(\vec{\alpha}) = \lambda\cdot f(\vec{\alpha})$ είναι γραμμική απεικόνιση και λέγεται γινόμενο του λ με την f.

Παράδειγμα

$f: \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}[x]$

$$f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{11}+a_{22})x - 3a_{11}$$

$$7 \in \mathbb{R} \quad 7f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 7[(a_{11}+a_{22})x - 3a_{11}] = 7a_{11}x + 7a_{22}x - 21a_{11}$$

Απόδειξη

Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ $(\lambda f)(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$ ΘΔΟ ίσο με $(\lambda f)(\vec{\alpha})+(\lambda f)(\vec{\beta})$

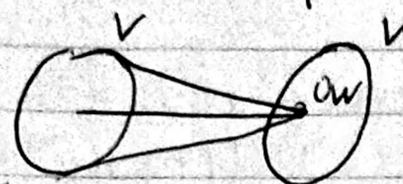
$(\lambda f)(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = \lambda f(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = \lambda f(\vec{\alpha}) + \lambda f(\vec{\beta}) = (\lambda f)(\vec{\alpha}) + (\lambda f)(\vec{\beta})$

Έστω $\mu \in K$ και $\vec{\alpha} \in V$ ΘΔΟ $(\lambda f)(\mu\vec{\alpha}) = \mu(\lambda f)(\vec{\alpha})$

$\lambda f(\mu\vec{\alpha}) = \lambda(f(\mu\vec{\alpha})) = \lambda(\mu f(\vec{\alpha})) = (\lambda\mu)(f(\vec{\alpha})) = \mu(\lambda\cdot f(\vec{\alpha})) =$
$\mu(\lambda f)(\vec{\alpha})$

Άρα $\mu(\lambda f)(\vec{\alpha})$ γραμμική

$V \xrightarrow{0} W$ μηδενική απεικόνιση $\forall\ \vec{\alpha} \in V$



$O(\vec{\alpha}) = \vec{0}_W$

$\operatorname{Ker} O = V$

$\operatorname{Im} O = \{\vec{0}_W\}$

$f: V \to W$

$f + 0 = f$

$f + ((-1)f) = 0 \leftarrow$ μηδενική απεικόνιση

Ορισμός: Έστω V, W δύο K-διαν. χώροι με $\mathcal{L}(V,W)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων από το V στο W

$(\mathcal{L}(V,W), K, +, \cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος

$f, g, h \in \mathcal{L}(V,W)$ $\quad f + (g+h) = (f+g) + h$

Έστω $\vec{\alpha} \in V$, θδο ισχύει:

$(f+(g+h))(\vec{\alpha}) = ((f+g)+h)(\vec{\alpha})$

$(f+(g+h))(\vec{\alpha}) = f(\vec{\alpha}) + (g+h)(\vec{\alpha}) = f(\vec{\alpha}) + g(\vec{\alpha}) + h(\vec{\alpha}) =$

$= (f(\vec{\alpha}) + g(\vec{\alpha})) + h(\vec{\alpha}) = (f+g)(\vec{\alpha}) + h(\vec{\alpha}) = ((f+g)+h)(\vec{\alpha})$

Το $(\mathcal{L}(V,W), K, +, \cdot)$ είναι K-διαν. χώρος

$\dim V = n \quad \mathcal{L}(V,W) \cong K^{m \times n}$

$\dim W = m$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, bend left=60, "f"] \arrow[r, "f+g"] \arrow[r, bend right=60, "g"'] & W \end{tikzcd}$$

$\alpha = \{ \vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_n} \}$ baza w V $\qquad$ $b = \{ \vec{b_1}, \vec{b_m} \}$ baza w W

$$\underset{m \times n}{[f]_\alpha^b} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\underset{m \times n}{[g]_\alpha^b} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{1n} \\ & \\ b_{m1} & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$[f+g]_\alpha^b$

$(f+g)(\vec{\alpha_1}) = f(\vec{\alpha_1}) + g(\vec{\alpha_1}) = (a_{11}\vec{b_1} + a_{21}\vec{b_2} + \dots + a_{m1}\vec{b_m}) +$

$+ b_{11}\vec{b_1} + b_{21}\vec{b_2} + \dots + b_{m1}\vec{b_m}) =$

$= (a_{11} + b_{11})\vec{b_1} + \dots + (a_{m1} + b_{m1})\vec{b_m}$